Inżynierskie zastosowania statystyki - Ćwiczenia nr 1

1 Populacja i próba

1. Do zbadania oporności partii produkcyjnej wafli w produkcji półprzewodników wybrano losowo trzy wafle. Co jest populacją, a co próbą?
2. Rutherford, Chadwick i Ellis (1920) pokazali, że rozkład liczby cząstek α emitowanych przez cząstkę promieniotwórczą wykazuje duży stopień zgodności z rozkładem Poissona. Przeprowadzony przez nich słynny eksperyment polegał na obserwowaniu liczby cząstek α zarejestrowanych przez licznik Geigera-Müllera w ciągu 7.5 sekundy. Eksperyment powtórzono $n = 2608$ razy. Wskaż próbę i populację w tym eksperymencie?
3. Laborant zmierzył 8 razy współczynnik pH pewnej substancji przy użyciu tego samego instrumentu. Czy te 8 pomiarów jest populacją czy próbą?

2 Próba prosta

Próba losowa prosta, n-elementowa, jest to próba wylosowana z populacji w taki sposób, że przed jej pobraniem każdy pozdbiór składający się z n elementów populacji generalnej ma takie same szanse (prawdopodobieństwo) wylosowania.
W badaniu statystycznym może nas interesować jedna albo więcej cech populacji generalnej. Badaniu mogą podlegać cechy *mierzalne (ilościowe)* - np. długość, wytrzymałość, ciężar, lub *niemierzalne (jakościowe)* - np. kolor, płeć, zawód.

3 Rozkłady dyskretne

Definicja 1 *Jeżeli X jest dyskretną zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wówczas funkcja masy prawdopodobieństwa ma następujące własności:*

$$f(x_i) \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1, \tag{2}$$

$$f(x_i) = P(X = x_i). \tag{3}$$

4. Niech $f(x) = \frac{2x+1}{25}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$.
   (a) Sprawdź czy funkcja $f(x)$ jest funkcją masy prawdopodobieństwa.
   Oblicz następujące prawdopodobieństwa:
   (b) $P(X = 4)$,
   (c) $P(X \leq 1)$,
   (d) $P(2 \leq X < 4)$,
   (e) $P(X > -10)$.
5. Optyczny system kontroli ma za zadanie rozróżnienie pomiędzy różnymi typami części. Prawdopodobieństwo prawidłowej klasyfikacji każdej części jest równe $0,98$. Załóżmy, że trzy części są sprawdzane i że klasyfikacje są niezależne. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę części, które zostały prawidłowo zklasyfikowane. Określ funkcję masy prawdopodobieństwa X.
6. Zespół składa się z trzech elementów mechanicznych. Załóżmy, że prawdopodobieństwa, że pierwszy, drugi i trzeci element spełnia wymagania są odpowiednio równe $0,94$, $0,98$ i $0,99$. Załóżmy, że elementy są niezależne. Określ funkcję masy prawdopodobieństwa liczby komponentów w zespole, które spełniają wymagania.

4 Rozkłady ciągłe

Definicja 2 *Jeżeli X jest ciągłą zmienną losową, wówczas funkcja gęstości ma następujące własności:*

$$f(x) \geq 0, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1, \tag{5}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = \textit{ obszar pod } f(x) \textit{ od } a \textit{ do } b,\ a, b \textit{ dowolne}. \tag{6}$$

Definicja 3 *Jeżeli X jest ciągłą zmienną losową, wówczas dla dowolnej realizacji x tej zmiennej*

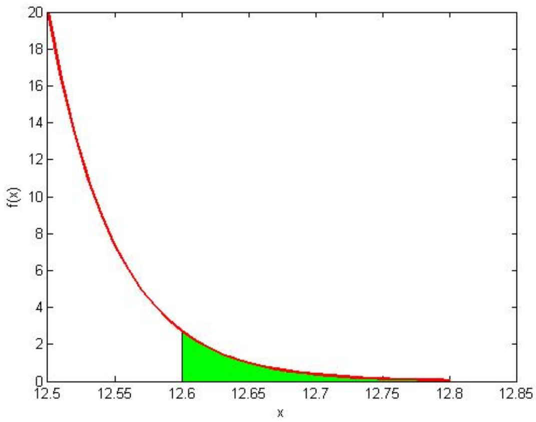
$$P(X = x) = 0. \tag{7}$$

Wniosek 1 *Jeżeli X jest ciągłą zmienną losową, wówczas dla dowolnych realizacji tej zmiennej x_1 i x_2*

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2). \tag{8}$$

7. Niech ciągła zmienna losowa X oznacza natężenie prądu w miliamperach mierzone w cienkim drucie miedzianym. Załóżmy, że zakres X to $[0, 20\ \ mA]$, i załóżmy, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa X jest dana wzorem $f(x) = 0,05$ dla $0 \leq x \leq 20$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że natężenie prądu jest mniejsze niż $10\ mA$?

8. Niech ciągła zmienna losowa X oznacza średnicę otworu wywierconego w części arkusza blachy. Średnica docelowa wynosi $12,5\ mm$. Większość losowych zakłóceń procesu skutkuje większymi średnicami. Dane historyczne wskazują, że rozkład X może być zamodelowany za pomocą funkcji gęstości $f(x) = 20\,e^{-20(x-12.5)}$, $x \geq 12,5$. Jeśli blachy z otworem o średnicy większej niż $12,5\ mm$ są złomowane, jaki procent arkuszy trafia na złom? Funkcja gęstości oraz żądane prawdopodobieństwo przedstawione są na rysunku poniżej.



9. Niech $f(x) = x/8$, $3 < x < 5$. Wyznacz prawdopodobieństwa:
   (a) $P(X < 4)$,
   (b) $P(X > 3.5)$,
   (c) $P(4 < X < 5)$,
   (d) $P(X < 3.5 \vee X > 4.5)$.