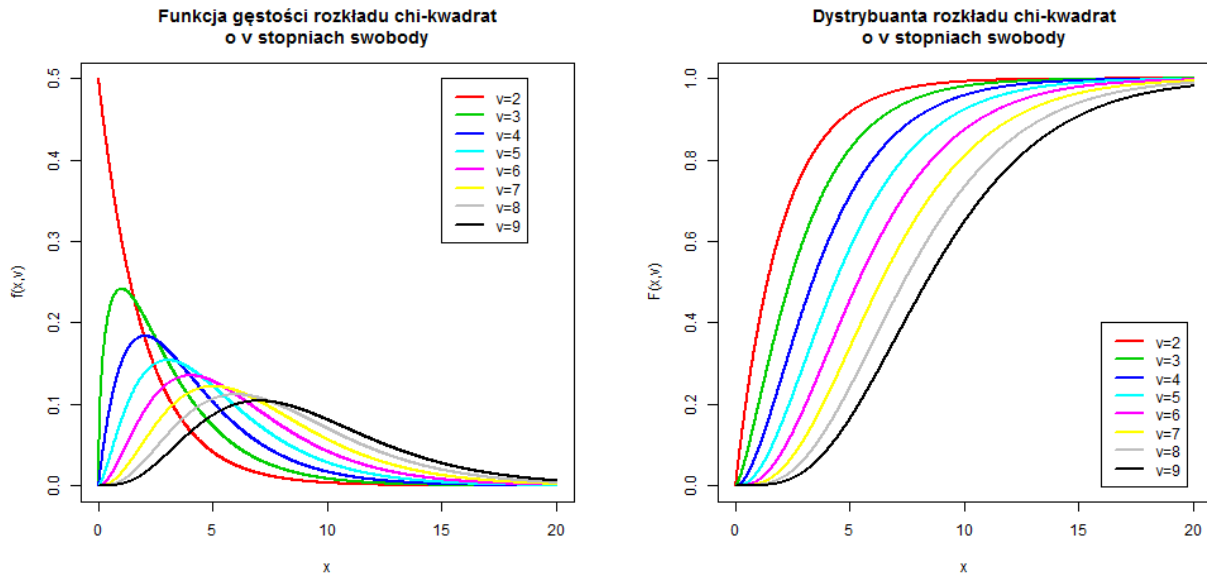


# Inżynierskie zastosowania statystyki - Ćwiczenia nr 10

## 1 Rozkład $\chi^2$



- Z tablicy kwantyli  $\chi^2(p, v)$  ( $p$  - prawdopodobieństwo,  $v$  - liczba stopni swobody) rozkładu  $\chi^2$  odczytaj następujące kwantyle:  $\chi^2(0.975, 11)$ ,  $\chi^2(0.005, 15)$ .

## 2 Testy istotności dla wariancji

Badana cecha ma rozkład  $N(\mu, \sigma^2)$  o nieznanym parametrach  $\mu$  i  $\sigma^2$ .

Statystyka testowa

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \quad (1)$$

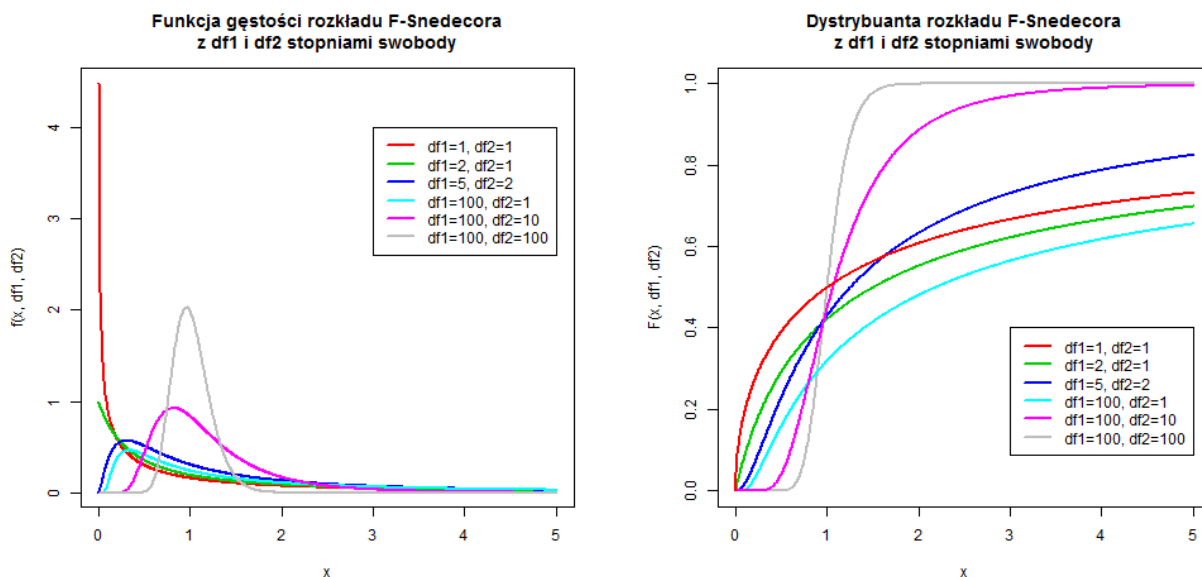
przy założeniu prawdziwości hipotezy  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  ma rozkład  $\chi^2$  z  $n - 1$  stopniami swobody. ( $\chi^2(n - 1)$ ).

Hipoteza alternatywna	Obszar krytyczny
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$(0, \chi^2(\frac{\alpha}{2}, n - 1)] \cup [\chi^2(1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1), +\infty)$
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$[\chi^2(1 - \alpha, n - 1), +\infty)$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$(0, \chi^2(\alpha, n - 1)]$

- Żeby połączyć dwa elementy za pomocą nitu, nit musi pasować do otworu w tych elementach. Wybrano próbę losową  $n = 15$  elementów i zmierzono średnice otworów. Wariancja z próby pomiaru średnic otworów wyniosła  $s^2 = 64 \cdot 10^{-6} \text{mm}^2$ . Jeżeli wariancja średnic otworów przekracza  $10^{-4} \text{mm}^2$ , wówczas prawdopodobieństwo tego, że nit nie będzie pasował jest zbyt wysokie. Czy próba dostarcza dowodów na to, że wariancja przekracza  $10^{-4} \text{mm}^2$  na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ ? Dokonaj niezbędnych założeń odnośnie rozkładu populacji.
- Automat napełniający wykorzystuje się do napełniania butelek płynnym detergentem. Wariancja z próby losowej 20 butelek wynosi  $s^2 = 13.38 \text{ml}^2$ . Jeżeli wariancja objętości napełniania przekracza  $9 \text{ml}^2$ , nieakceptowalna proporcja butelek będzie zbyt lub niewystarczająco napełniona. Czy na podstawie tej próby

mamy dowody, żeby twierdzić, że na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$  producent ma problem z nieodpowiednio napełnionymi butelkami? Załóż, że rozkład objętości napełniania jest normalny.

### 3 Rozkład $F$ -Snedecora



W celu wyznaczenia kwantyli, których nie można bezpośrednio odczytać z tablic statystycznych, korzystamy z zależności:

$$f_{1-p,u,v} = \frac{1}{f_{p,u,v}}, \quad (2)$$

gdzie  $f_{p,u,v}$  oznacza kwantyl stopnia  $p$  rozkładu  $F$  o  $u$  i  $v$  stopniach swobody.

- Z tablicy kwantyli  $F(p, df1, df2)$  ( $p$  - prawdopodobieństwo,  $df1$  - liczba stopni swobody w liczniku,  $df2$  - liczba stopni swobody w mianowniku) rozkładu  $F$ -Snedecora odczytaj następujące kwantyle:  $F(0.95, 15, 10)$ ,  $F(0.99, 15, 10)$ ,  $F(0.025, 15, 10)$ ,  $F(0.005, 15, 10)$ .

### 4 Weryfikacja hipotezy o równości wariancji dwóch populacji

Interesuje nas przetestowanie hipotezy  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  dotyczącej różnicy pomiędzy wariancjami badanej cechy w dwóch populacjach.

Dysponujemy dwiema próbami:

- $n_1$ -elementową próbą losową z populacji 1  $X_1 = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1})$  oraz
- $n_2$ -elementową próbą losową z populacji 2  $X_2 = (X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2})$ .

Średnie arytmetyczne z obu prób wynoszą odpowiednio  $\bar{X}_1$  i  $\bar{X}_2$ , a wariancje  $s_1^2$  i  $s_2^2$ .

Statystyka testowa

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \quad (3)$$

przy założeniu prawdziwości hipotezy  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ma rozkład  $F$ -Snedecora o  $(n_1 - 1, n_2 - 1)$  stopniach swobody.

Hipoteza alternatywna	Obszar krytyczny
$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$(0, f_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}] \cup [f_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}, +\infty)$
$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$[f_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}, +\infty)$
$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$(0, f_{\alpha, n_1-1, n_2-1}]$

5. Warstwy tlenkowe na powierzchni półprzewodników są trawione w mieszaninie gazów, żeby osiągnąć właściwą grubość. Zmienność grubości warstwy tlenku jest cechą krytyczną wafli, mała zmienność jest pożądana dla kolejnych etapów przetwarzania. Dwie różne mieszanki gazów są badane w celu określenia która z nich jest lepsza pod kątem uzyskania małej zmienności grubości warstwy tlenku. Po dwadzieścia wafli jest wytrawiane w każdej z mieszanek. Odchylenia standardowe z prób wynoszą odpowiednio  $s_1 = 1.96\text{Å}$  ( $1\text{Å} = 10^{-10}m$ ) i  $s_2 = 2.13\text{Å}$ . Czy na tej podstawie możemy powiedzieć, że któraś mieszanka gazów jest lepsza na poziomie istotności  $\alpha = 0.05$ ?
6. Przeprowadzono badanie w celu ustalenia czy kobiety i mężczyźni różnią się pod względem czasu potrzebnego do zmontowania pewnego elementu na płytce drukowanej. Wybrano 25 mężczyzn i 21 kobiet i poproszono ich o złożenie elementu. Na tej podstawie obliczono wariancję czasu składania elementu dla mężczyzn  $s_m^2 = 0.9604\text{min}^2$  i kobiet  $s_k^2 = 1.0404\text{min}^2$ . Czy mamy dowody, żeby twierdzić, że mężczyźni i kobiety różnią się na poziomie istotności  $\alpha = 0.01$  pod względem czasu potrzebnego na zrealizowanie tego zadania montażowego? Dokonaj niezbędnych założeń odnośnie rozkładów populacji.