Inżynierskie zastosowania statystyki - Ćwiczenia nr 2

Definicja 1 *Dystrybuanta $F(x)$ rozkładu dyskretnej zmiennej losowej X dana jest wzorem*

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i), \tag{1}$$

gdzie f jest funkcją masy prawdopodobieństwa.
Dla dyskretnej zmiennej losowej X, $F(x)$ ma następujące własności:

1. *$P(X = x_i) = F(x_i^+) - F(x_i)$, gdzie $F(x_i^+)$ oznacza granicę prawostronną w punkcie x_i*
2. *$0 \le F(x) \le 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$,*
3. *Jeżeli $x \le y$, wówczas $F(x) \le F(y)$.*

1. Zmienna losowa X ma dystrybuantę $F(x)$ następującej postaci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1, \\ 0.5 & 1 < x \le 3, \\ p & x > 3. \end{cases}$$

   (a) Wyznacz wartość parametru p.
   (b) Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
   (c) Oblicz prawdopodobieństwo $P(1 \le X \le 2)$.
   (d) Oblicz EX i D^2X.

2. Zmienna losowa X, dla której $P(X = x_i) = p_i$ ma rozkład podany w tabeli

x_i	2	3	5	8
p_i	α	0.4	0.3	0.1

   (a) Wyznacz α.
   (b) Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X.
   (c) Wyznacz EX i D^2X.
   (d) Oblicz prawdopodobieństwo $P(2.7 < X < 5.1)$.

Definicja 2 *Jeśli $f(x)$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, to funkcję określoną wzorem*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

nazywamy dystrybuantą rozkładu ciągłego.
Własności:

1. *$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie x.*
2. *$0 \le F(x) \le 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$,*
3. *$F(x)$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą.*

3. Wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X, której dystrybuanta dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 0.2x & 0 < x \le 4, \\ 0.04x + 0.64 & 4 < x \le 9, \\ 1 & x > 9. \end{cases} \tag{3}$$

4. Funkcja gęstości zmiennej losowej X dana jest wzorem $f(x) = 0.5x - 1$ dla $2 < x \leq 4$.
   (a) Oblicz prawdopodobieństwo $P(X < 2.5)$.
   (b) Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X.
   (c) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.

Wskaźniki położenia

Średnia arytmetyczna	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Mediana	$m_e = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}\right), & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ x_{((n+1)/2)}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \end{cases}$
	gdzie $x_{(i)}$ oznacza i-tą co do wielkości liczbę w ciągu $x_1, \ldots, x_n$
Moda	m_o, najczęściej powtarzająca się wartość, o ile istnieje, nie będącą x_{min} ani x_{max}

Wskaźniki rozproszenia (skali)

Rozstęp próby	$R = x_{(n)} - x_{(1)}, x_{(n)} = \max(x_i), x_{(1)} = \min(x_i)$
Wariancja	$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$
Odchylenie standardowe	$s = \sqrt{s^2}$
Kwartyl dolny	Q_1, mediana zbioru elementów próby mniejszych lub równych m_e
Kwartyl górny	Q_3, mediana zbioru elementów próby większych lub równych m_e
Rozstęp międzykwartylowy	$IQR = Q_3 - Q_1$

5. W konstrukcjach lotniczych zapobieganie propagacji pęknięć wynikających ze zmęczenia materiału jest istotne ze względu na bezpieczeństwo. Analiza pęknięć zmęczeniowych 9 cyklicznie obciążanych wingboxów (łącznik pomiędzy kadłubem a skrzydłem samolotu) dała następujące wyniki (w mm): 2.13, 2.96, 3.02, 1.82, 1.15, 1.34, 2.04, 2.47, 2.60. Oblicz wszystkie powyższe wskaźniki położenia i rozproszenia dla tej próby.

Estymacja punktowa

Nieznany parametr populacji	**Estymator**
$\mu = EX$	$\hat{\mu} = \bar{x}$
$\sigma^2 = D^2X$	$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$

6. Wyznacz estymatory wartości średniej i wariancji dla poprzedniego przykładu.