Inżynierskie zastosowania statystyki - Ćwiczenia nr 4

Hipotezę zerową zawsze stawiamy jako równość

$$H_0: \text{ charakterystyka populacji } = \text{ hipotetyczna wartość}$$

gdzie wartość hipotetyczna to wartość wywnioskowana z konkretnego problemu.
Hipotezy alternatywne można postawić w jednej z trzech form:

$$H_1: \text{ charakterystyka populacji } \neq \text{ hipotetyczna wartość}$$
$$H_1: \text{ charakterystyka populacji } < \text{ hipotetyczna wartość}$$
$$H_1: \text{ charakterystyka populacji } > \text{ hipotetyczna wartość}$$

1. Dla poniższych par, zaznacz te, które są niezgodne z regułami i wyjaśnij dlaczego.
   (a) $H_0: \mu = 15$, $H_1: \mu = 15$
   (b) $H_0: \mu = 123$, $H_1: \mu < 123$
   (c) $H_0: \mu = 123$, $H_1: \mu = 125$
   (d) $H_0: \bar{x} = 123$, $H_1: \bar{x} \neq 123$

2. Ze względu na różnorodność procesu produkcji, piłeczki tenisowe produkowane przez pewną maszynę nie mają takiej samej średnicy. Niech μ oznacza średnią średnicę wszystkich piłeczek tenisowych aktualnie produkowanych. Załóżmy, że maszyna była pierwotnie wykalibrowana do produkowania piłeczek o średnicy wymaganej przez specyfikację czyli $\mu = 8cm$. Jednakże producent ma pewne podejrzenia, że obecnie produkowane piłeczki odbiegają od standardu czyli $\mu \neq 8cm$ musi być brane pod uwagę. Jeżeli na podstawie próby zostanie stwierdzone, że $\mu \neq 8cm$, proces zostanie wstrzymany na czas ponownej kalibracji maszyny. Ponieważ zatrzymanie produkcji jest kosztowne, producent chce być dość pewny że $\mu \neq 8cm$ zanim zleci rekalibrację.
   (a) Postaw hipotezę zerową i hipotezę alternatywną dla tego problemu.
   (b) Jaki wysnujemy wniosek z testu, jeżeli próba dostarczy wystarczających dowodów przeciwko hipotezie zerowej?
   (c) Jaki wysnujemy wniosek z testu, jeżeli próba nie dostarczy wystarczających dowodów przeciwko hipotezie zerowej?

3. Twierdzi się, że świetlówki kompaktowe są znacznie bardziej energooszczędne niż standardowe żarówki. Żarówki firmy Osram o mocy 86 Watt mają na pudełku napisane "Średnia długość życia 10000 godzin". Niech μ oznacza prawdziwą długość życia świetlówek 86-wattowych firmy Osram. Reklamowana długość życia to $\mu_0 = 10000$ godzin. Klienci, którzy kupują te świetlówki, byliby niezadowoleni gdyby okazało się, że μ jest mniejsze od reklamowanej wartości μ_0. Załóżmy, że pobrano próbę świetlówek 86-wattowych firmy Osram i przetestowano pod kątem długości życia. Wartości z próby mogą zostać użyte do przetestowania hipotezy zerowej
   $$H_0: \mu = 10000 \text{ h}$$
   przeciwko hipotezie alternatywnej
   $$H_1: \mu < 10000 \text{ h}.$$
   (a) Skoro H_1 ma w sobie nierówność, to czy nie powinniśmy powiedzieć, że $H_0: \mu \geq 10000$?
   (b) Załóżmy, że mamy dowody na to, że H_0 powinna być odrzucona na rzecz H_1. Innymi słowy, mamy dowody na to, że średnia żywotność świetlówki jest krótsza niż reklamowane 10000 h. Czy mamy dowody na to, że średnia żywotność będzie mniejsza od 10001?

H_0 - oskarżony jest winny
H_1 - oskarżony jest niewinny

		Wyrok	
		Winny	Niewinny
		brak podstaw do odrzucenia H_0	odrzucenie H_0 na rzecz H_1
Stan faktyczny	Winny	✓	błąd I rodzaju
	Niewinny	błąd II rodzaju	✓

Błąd I rodzaju - odrzucenie H_0 gdy H_0 jest prawdziwa. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju oznaczamy przez α i nazywamy poziomem istotności.
Błąd II rodzaju - nieodrzucenie H_0 gdy H_0 jest fałszywa. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju oznaczamy przez β.

Przykład
W 2004 roku, Vertex Pharmaceuticals, firma biotechnologiczna, ogłosiła, że rozpoczyna próby kliniczne eksperymentalnego leku VX-680, który okazał się hamować tempo wzrostu raka trzustki i jelita grubego w badaniach na zwierzętach (New York Times, 24 lutego 2004). Niech μ oznacza prawdziwą średnią stopę wzrostu guzów u pacjentów otrzymujących eksperymentalny lek. Dane otrzymane z badań klinicznych mogą zostać wykorzystane do przetestowania:
$H_0 : \mu =$ średnie tempo wzrostu guzów u pacjentów nie przyjmujących eksperymentalnego leku
przeciwko
$H_1 : \mu <$ średnie tempo wzrostu guzów u pacjentów nie przyjmujących eksperymentalnego leku.
Hipoteza zerowa stwierdza, że eksperymentalny lek nie jest skuteczny, tzn. że średnia stopa wzrostu guzów u pacjentów otrzymujących lek eksperymentalny jest taka sama jak w przypadku pacjentów, którzy eksperymentalnego leku nie przyjmują. Hipoteza alternatywna stwierdza, że eksperymentalny lek jest skuteczny w zmniejszaniu średniej stopy wzrostu guzów. W tym kontekście, błąd I rodzaju polega na błędnym przyjęciu, że eksperymentalny lek jest skuteczny w hamowaniu tempa wzrostu guzów. Potencjalną konsekwencją popełnienia błędu I rodzaju jest to, że firma będzie nadal przeznaczać środki na rozwój leku, który tak naprawdę nie jest skuteczny. Błąd II rodzaju polega na przyjęciu, że eksperymentalny lek nie jest skuteczny, gdy w rzeczywistościśrednia stopa wzrostu guzów jest zmniejszona. Potencjalną konsekwencją popełnienia błedu II rodzaju jest to, że firma może zrezygnować z dalszych badań nad lekiem, który był skuteczny.

4. Systemy ewakuacyjne w samolotach są zasilane paliwem stałym. Tempo spalania jest istotną charakterystyką tego paliwa. Zgodnie ze specyfikacją, średnie spalanie powinno wynosić $50cm^3/s$. Testowana jest hipoteza zerowa $H_0 : \mu = 50\frac{cm^3}{s}$ przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu \neq 50\frac{cm^3}{s}$. Załóżmy, że jeżeli $\bar{x} < 48.5$ lub $\bar{x} > 51.5$, hipoteza zerowa zostanie odrzucona.

   (a) Narysuj funkcję gęstości statystyki $\bar{x}$ gdy $H_0 : \mu = 50$ jest prawdziwa. Zaznacz na wykresie obszar krytyczny, obszar przyjęć i wartości krytyczne.

   (b) Opisz na czym polega błąd I rodzaju w kontekście tego problemu. Jakie mogą być potencjalne konsekwencje popełnienia tego błędu?

   (c) Opisz na czym polega błąd II rodzaju w kontekście tego problemu. Jakie mogą być potencjalne konsekwencje popełniania tego błędu?

   (d) Wiadomo, że odchylenie standardowe wynosi $\sigma = 2.5\frac{cm^3}{s}$. Oblicz prawdopodobieństwo α popełnienia błędu I rodzaju.

5. Producent kalkulatorów odbiera duże transporty obwodów drukowanych od dostawcy. Jest to zbyt kosztowne i czasochłonne, aby sprawdzić wszystkie przychodzące obwody, więc gdy przesyłka dotrze, wybierana jest próbka obwodów do inspekcji. Informacje z próbki są następnie wykorzystywane do testowania $H_0 : p = 0,01$ przeciwko $H_a : p > 0,01$, gdzie p oznacza rzeczywisty odsetek wadliwych układów w wysyłce. Jeśli hipoteza zerowa nie jest odrzucana, przesyłka jest przyjmowana, a obwody są użyte w produkcji kalkulatorów. Jeżeli hipoteza zerowa jest odrzucana, cała partia wraca do dostawcy z powodu zbyt niskiej jakości. (Określa się, że dostarczona partia jest zbyt niskiej jakości, jeśli zawiera on więcej niż 1% wadliwych układów.)

   (a) Określ czym będą błędu I i II rodzaju w tym kontekście.

   (b) Z punktu widzenia producenta kalkulatorów, który błąd jest uważany za bardziej poważny?

   (c) Z punktu widzenia dostawcy obwodów, który błąd jest uważany za bardziej poważny?