Inżynierskie zastosowania statystyki - Ćwiczenia nr 5

1 Testy istotności dla wartości średniej

W testach do weryfikacji hipotezy o wartości przeciętnej $H_0 : \mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę $\bar{X}$, czyli średnią arytmetyczną próby.

1.1 Model 1.

Badana cecha X populacji ma rozkład $N(\mu, \sigma^2)$ przy znanej wariancji σ^2.

Statystyka testowa

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, \tag{1}$$

przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ ma rozkład $N(0, 1)$.

1.2 Ogólna procedura testowania

1. Wskaż parametr, którego test ma dotyczyć.
2. Postaw hipotezę zerową H_0.
3. Postaw hipotezę alternatywną H_a (H_1).
4. Ustal poziom istotności α.
5. Wskaż statystykę testową.
6. Wyznacz odpowiednie kwantyle i wskaż obszar krytyczny dla testu.
7. Oblicz wartość statystyki.
8. Zdecyduj czy hipoteza zerowa powinna zostać odrzucona i skomentuj to w kontekście problemu.

2 Zadania

1. Analizowana jest wydajność pewnego procesu chemicznego. Zalecane jest, aby średnia wydajność procesu była nie mniejsza niż 90%. Wiadomo, że odchylenie standardowe wydajności populacji jest równe $\sigma = 3$, wydajność ma rozkład normalny i próba zawierająca $n = 5$ obserwacji daje następujące wartości wydajności: 91.6%, 88.75%, 90.8%, 89.95% i 91.3%. Przyjmijmy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Czy wydajność procesu jest zgodna z oczekiwaniami?
2. Zgodnie ze specyfikacją, średnie spalanie paliwa stałego służącego do zasilania systemów ewakuacyjnych w samolotach powinno wynosić $50\frac{cm^3}{s}$. Wiadomo, że tempo spalania paliwa stałego można przybliżyć za pomocą rozkładu normalnego, oraz, że odchylenie standardowe wynosi $\sigma = 2\frac{cm^3}{s}$. Na potrzeby testu ustalono poziom istotności $\alpha = 0.05$, wybrano próbę $n = 25$ elementową samolotów pewnego typu i obliczono średnie spalanie z próby $\bar{x} = 51.3\frac{cm^3}{s}$. Czy spalanie paliwa stałego w tego typu samolotach jest zgodne ze specyfikacją?
3. Fabryka produkuje wały korbowe do silników samochodowych. Zużycie wału korbowego po 150.000 km powinno być nie większe niż $7.62\,\mu m$, w przeciwnym przypadku fabryka może spodziewać się rozszczeń gwarancyjnych. Wybrano próbę losową $n = 15$ wałów korbowych i na jej podstawie obliczono średnie zużycie $\bar{x} = 7\mu m$. Wiadomo, że $\sigma = 2.3\,\mu m$ i że zużycie ma rozkład normalny. Czy zużycie wałów korbowych produkowanych w tej fabryce jest zgodne ze specyfikacją?

4. Zgodnie ze specyfikacją średni punkt topnienia pewnego spoiwa powinien być równy $68.3°$C. Analiza $n = 10$ próbek tego spoiwa dała średnią $\bar{x} = 67.9°$C. Załóżmy, że punkt topnienia ma rozkład normalny z ochyleniem standardowym $\sigma = 17°$C. Czy średni punkt topnienia tego spoiwa jest zgodny ze specyfikacją na poziomie istotności $\alpha = 0.01$?

5. Wiadomo, że żywotność baterii ma w przybliżeniu rozkład normalny z odchyleniem standardowym $\sigma = 1.25$ h. Wybrano próbę $n = 10$ baterii. Średnia żywotność baterii w próbie wyniosła $\bar{x} = 40.5$ h.

   (a) Czy mamy wystarczające dowody na to, że średnia żywotność baterii jest inna niż 40 h? Niech $\alpha = 0.05$.

   (b) Ile wynosi prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju w tym teście?

   (c) Ile wynosi prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju w tym teście jeżeli średnia żywotność baterii jest w rzeczywistości równa $\mu = 42$ h?

6. Zgodnie z informacją podaną przez producenta średni zasięg pewnego samochodu elektrycznego to 80 km. Wylosowano próbę $n = 5$ samochodów i przetestowano na torze testowym w tych samych warunkach. Średni zasięg otrzymany z próby wyniósł $76.5km$. Załóżmy, że średni zasięg ma rozkład normalny z wariancją równą $\sigma^2 = 9$km. Czy mamy dowody na to, że producent podaje nieprawdziwe informacje?