

Termin oddania: 30 października 2013

Systemy ewakuacyjne w samolotach są zasilane paliwem stałym. Tempo spalania jest istotną charakterystyką tego paliwa. Zgodnie ze specyfikacją, średnie spalanie powinno wynosić $50 \text{ cm}^3/\text{s}$. Testowana jest hipoteza zerowa $H_0 : \mu = 50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu \neq 50 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ na podstawie próby $n = 10$ elementowej. Wiadomo, że tempo spalania paliwa stałego można przybliżyć za pomocą rozkładu normalnego oraz, że odchylenie standardowe wynosi $\sigma = 2.5 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$.

1. Załóżmy, że jeżeli $\bar{x} < 48.5$ lub $\bar{x} > 51.5$, hipoteza zerowa zostanie odrzucona. Wiadomo, że prawdopodobieństwo α popełnienia błędu I rodzaju wynosi

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{x}} &= \mu = 50, & \sigma_{\bar{x}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{10}} = 0.79 \\ \alpha &= P(\bar{X} < 48.5 \text{ gdy } \mu = 50) + P(\bar{X} > 51.5 \text{ gdy } \mu) = \\ &= P\left(Z < \frac{48.5 - 50}{0.79}\right) + P\left(Z > \frac{51.5 - 50}{0.79}\right) = \\ &= P(Z < -1.9) + P(Z > 1.9) = \\ &= 2 - 2\Phi(1.9) = 0.0574\end{aligned}$$

Ile procent prób losowych spowoduje, że hipoteza zerowa $H_0 : \mu = 50$ zostanie odrzucona?

2. Eksperymentator postanowił rozszerzyć obszar przyjęć i za wartości krytyczne przyjął odpowiednio 48 i 52. Oblicz prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju.
3. Jaki wpływ na wartość prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju ma rozszerzenie obszaru przyjęć?
4. Załóżmy, że prawdziwa średnia wynosi $\mu = 52$ (czyli $H_0 : \mu = 50$ jest fałszywa), a za wartości krytyczne przyjęto 48.5 i 51.5. Wówczas prawdopodobieństwo β popełnienia błędu II rodzaju wyznaczamy jako

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{x}} &= \mu = 52, & \sigma_{\bar{x}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2.5}{\sqrt{10}} = 0.79 \\ \beta &= P(48.5 < \bar{X} < 51.5 \text{ gdy } \mu = 52) = \\ &= P\left(\frac{48.5 - 52}{0.79} < Z < \frac{51.5 - 52}{0.79}\right) = \\ &= P(-4.43 < Z < -0.63) = \\ &= \Phi(-0.63) - \Phi(-4.43) = \Phi(4.43) - \Phi(0.63) = 1.0000 - 0.7357 = 0.2643\end{aligned}$$

Zatem, jeżeli testujemy $H_0 : \mu = 50$ przeciwko $H_1 : \mu \neq 50$ na podstawie próby $n = 10$ elementowej i prawdziwa wartość średnia wynosi $\mu = 52$, to prawdopodobieństwo, że nie odrzucimy hipotezy zerowej, pomimo, że jest ona fałszywa, wynosi 0.2643.

Eksperymentator postanowił rozszerzyć obszar przyjęć i za wartości krytyczne przyjął odpowiednio 48 i 52. Oblicz prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju gdy prawdziwa wartość średnia wynosi $\mu = 52$.

5. Jaki wpływ ma rozszerzenie obszaru przyjęć na wartość prawdopodobieństwa błędu II rodzaju?
6. Istnieje zależność pomiędzy wartościami prawdopodobieństw α i β . Na podstawie powyższych zadań wysnuj wniosek jaka to zależność.